Zadania z wielomianów

(poziom rozszerzony)

Zadanie 1: Określ stopień wielomianu jeśli:

a) $G(x) = 0{,}5x^n$ oraz $G(4) = 32$

b) $G(x) = \sqrt{5}x^n$ oraz $G(\sqrt{5}) = 125$

Zadanie 2: Wyznacz współczynnik *a* wielomianu $W(x) = -x^4 - 2x^3 + ax + 3$ jeśli $W(-2) = -1$

Zadanie 3: Wyznacz współczynniki *a* oraz *b* wielomianu $W(x) = 2x^4 + ax^3 + x + b$ jeśli $W(1) = -5$ oraz $W(2) = -31$

Zadanie 4: Wyznacz współczynnik *a* wielomianu $W(x) = x^4 + ax - 4$ jeśli $W(\sqrt{2} - 1) = W(1 - \sqrt{2})$

Zadanie 5: Dane są wielomiany $W(x) = -3x^3 + 2x^2 + 5x - 1$, $P(x) = 2x^2 + 3x$, $G(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7$

Wykonaj działania:

a) $W(x) + G(x)$

b) $W(x) \cdot P(x)$

c) $2P(x) - 3G(x)$

d) $P(3x) - 4W(x)$

e) $W(x) - [G(x) - 2P(x)]$

Zadanie 6: Sprawdź czy istnieją parametry *a* i *b*, tak aby wielomiany $W(x)$ oraz $P(x)$ były równe, jeśli:

a) $W(x) = 2x^3 + (3a + 1)x^2 + (b + 2)x - 4,\ P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 4$

b) $W(x) = 2ax(2x - b)^2,\ P(x) = 16x^3 - 48x^2 + 36x$

c) $W(x) = (x^2 - ax)^2 - (x^2 + bx)^2,\ P(x) = -2x^3 - 3x^2$

Zadanie 7: Wyznacz współczynniki *a* i *b*, tak aby $W(x) \cdot F(x) = H(x)$, jeśli $W(x) = x^2 + 3x + 2$, $F(x) = ax + b$, $H(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

Zadanie 8: Wyznacz współczynniki *m* i *n*, tak aby wielomian $W(x) \cdot F(x) - H(x)$ był wielomianem zerowym, jeśli $W(x) = x^2 + mx + n,\ F(x) = -3x + 5,\ H(x) = -3x^3 - x^2 - 2x + 20$

Zadanie 9: W wyniku podzielenia wielomianu $W(x) = (2x - 3)^2(3x + 1)^2$ przez wielomian *P(x)* otrzymano wielomian $Q(x) = 6x^2 - 7x - 3$. Wyznacz *P(x).*

Zadanie 10: Wielomian $W(x) = -4x^3 + ax^2 - 6x + b$ podzielono przez wielomian $P(x) = 2x^2 + 3$. W wyniku tego dzielenia otrzymujemy iloraz $Q(x) = 3 - 2x$. Wyznacz wartości współczynników *a* i *b.*

Zadanie 11: Wykonaj dzielenie wielomianów:

a) $(x^3 - 6x^2 + 12x - 16) : (x - 4)$

b) $(x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 12x - 9) : (x + 3)$

c) $(x^5 + 3x^3 + 2x) : (x^2 + 1)$

d) $(x^5 + x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 15) : (x^2 + 3)$

e) $(x^5 + x^2 - 6x + 8) : (x^3 - 3x + 1)$

f) $(-2x^3 + 4x^2 - 5x + 1) : (x - 2)$

Zadanie 12: Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x + 3)$ daje resztę 6, a przy dzieleniu przez $(x - 2)$ daje resztę 1. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $P(x) = (x + 3)(x - 2)$.

Zadanie 13: Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x-4)$ daje resztę 7, a przy dzieleniu przez $(x-2)$ daje resztę 3. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $P(x)=(x-4)(x-2)$.

Zadanie 14: Wielomian $W(x)$ przy dzieleniu przez $(x+2)$ daje resztę 8, a przy dzieleniu przez $(x+1)$ daje resztę -4. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez $P(x)=x^2+3x+2$.

Zadanie 15: Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian kwadratowy $P(x)=x^2+2x-8$ jest równa $R(x)=-5x+2$. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $(x+4)$.

Zadanie 16: Wykonaj dzielenie za pomocą schematu Hornera:

a) $(x^3-6x^2+12x-16):(x-4)$

b) $(x^4+8x^3+12x^2-12x-9):(x+3)$

c) $(-2x^3+4x^2-5x+1):(x-2)$

Zadanie 17: Wyznacz wartość parametru *a*, tak by pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4-x^3+ax-2$ była liczba 1

Zadanie 18: Wyznacz wartość parametru *b*, tak by pierwiastkiem wielomianu $W(x)=bx^3+x^2-2x-1$ była liczba $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 19: Podaj wszystkie pierwiastki wielomianu (o ile istnieją), jeśli:

a) $W(x)=(x-1)(x+4)x$

b) $W(x)=(2x^2+1)(x^2+3)(1-2x)$

c) $W(x)=(x^2+8)(x^2+34)$

d) $W(x)=(2x^3-16)(x^4+28)(x+5)$

Zadanie 20: Wyznacz wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu, jeśli:

a) $W(x)=x^4-x^3+4x-4$

b) $W(x)=3x^3+x^2-6x-2$

c) $W(x)=2x^3-x^2+2x-1$

d) $W(x)=x^4+2x^3+x+2$

Zadanie 21: Sprawdź nie wykonując dzielenia, czy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $P(x)$:

a) $W(x)=6x^4+5x^3-38x^2+5x+6,\ P(x)=x+3$

b) $W(x)=x^6+2x^5-3x^2-6x,\ P(x)=x+2$

Zadanie 22: Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu, jeśli:

a) $W(x)=x^3+2x^2-3x-10$

b) $W(x)=3x^3+8x^2+3x-2$

c) $W(x)=x^4+3x^3-12x^2-13x-15$

Zadanie 23: Dany jest wielomian $W(x)=x^3+ax^2-bx+6$. Wiedząc, że liczby 1 oraz 2 są pierwiastkami wielomianu znajdź trzeci pierwiastek.

Zadanie 24: Podaj pierwiastki i określ ich krotność, jeśli:

a) $W(x)=2x^2(x-1)^3(x+5)^5$

b) $W(x)=2(3x-1)^3(x-8)^{10}$

c) $W(x)=(x^2-9)(x^2+6x+9)$

d) $W(x)=x^6(x-1)^3(x^2-1)^4$

Zadanie 25: Wykaż że liczba *1* jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x+2$.

Zadanie 26: Wykaż że liczba *-2* jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 28x - 28.$$

Zadanie 27: Dla jakich wartości parametrów *m* oraz *n* liczba *1* jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + mx + n.$

Zadanie 28: Dla jakich wartości parametrów *m* oraz *n* liczba *-1* jest dwukrotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 - mx^2 + nx - 3.$

Zadanie 29: Rozłóż wielomiany na czynniki:

a) $W(x) = 4x^5 - 2x^4 + 6x^2$
b) $W(x) = 6x^3 - 12x^2 + 18x$
c) $W(x) = (x^2 + 1)(x + 3) - (x + 3)(4 - 3x^2)$
d) $W(x) = (2x^2 + 5)(x - 1) - (x - 1)(x^2 + 9)$
e) $W(x) = 9x^2 - 30x + 25$
f) $W(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
g) $W(x) = 7x^3 + 2x^2 - 21x - 6$
h) $W(x) = -9x^3 - 18x^2 + x + 2$
i) $W(x) = 8x^5 - 32x^3 - x^2 + 4$
j) $W(x) = 4x^4 + 5x^2 + 1$
k) $W(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
l) $W(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$
m) $W(x) = x^3 - x + 6$
n) $W(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3$
o) $W(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

Zadanie 30: Rozwiąż równania:

a) $(2x - 1)(x + 4)(3x - 9) = 0$
b) $(x^2 - 4)(x + 2)(x^3 - 8) = 0$
c) $x^3 - 4x^2 + 8x = 0$
d) $2x^6 - 4x^5 + 2x^4 = 0$
e) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$
f) $3x^3 + 5x^2 - 12x - 20 = 0$
g) $2x^5 + 3x^4 - 2x - 3 = 0$
h) $x^3 + 3x + 4 = 0$
i) $4x^3 - 3x - 1 = 0$
j) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$
k) $7x^2 = 2x^3 + 9$
l) $3x^2 + 9x = 2x^3 + 10$
m) $6x^3 - 13x^2 = 2 - 9x$
n) $x^8 + x^4 - 2 = 0$
o) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Zadanie 31: Rozwiąż równania, pamiętając o przypadkach:

a) $|x^3 - 1| = x^2 + x + 1$
b) $|x^3 - 8| = x^2 + 2x + 4$
c) $|4x^2 - 10| = x^3 - 7x$

Zadanie 32: Iloczyn kwadratu pewnej liczby i kwadratu liczby o 3 od niej większej jest równy 324. Wyznacz te liczby.

Zadanie 33: Iloczyn trzech kolejnych liczb parzystych jest równy 192. Jakie to liczby?

Zadanie 34: Śmietana pakowana jest w kartonowe, prostopadłościenne pudełka o pojemności 0,4 l. Wysokość pudełka jest o 6 cm krótsza od krawędzi podstawy. Podstawa pudełka jest kwadratem. Wyznacz wymiary pudełka.

Zadanie 35: Dla jakich wartości parametru *p* równanie: $(x+1)[x^2+(p+2)x+(p-1)^2]=0$ ma tylko jedno rozwiązanie?

Zadanie 36: Dla jakich wartości parametru *p* równanie: $(x-3)[x^2-2(2p+1)x+(p+2)^2]=0$ ma dwa różne rozwiązania?

Zadanie 37: Dla jakich wartości parametru *m* równanie: $(x^2+2x-3)[x^2+(m+1)x+4]=0$ ma cztery różne rozwiązania?

Zadanie 38: Dla jakich wartości parametru *m* równanie: $x^4+(m-3)x^2+m^2=0$ ma cztery różne rozwiązania?

Zadanie 39: Dla jakich wartości parametru *m* równanie: $x^4-2mx^2=m^2-4$ ma trzy różne rozwiązania?

Zadanie 40: Rozwiąż nierówności:

a) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$
b) $(2x-4)(x-1)(5-x)(6+x)<0$
c) $(x+3)(x-2)^3(x-3)^{10}>0$
d) $(x+5)(x-6)^4(x-8)^7\leq 0$
e) $9x^3+1\leq 5x-3x^2$
f) $3x^3+20\leq 7x^2+8x$
g) $2x^3+4x^2-10x-20>0$
h) $3x^3+3x^2-5x-5\leq 0$

Zadanie 41: Rozwiąż nierówności, pamiętając o przypadkach:

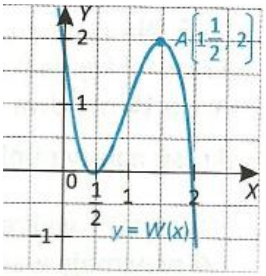
a) $|x^3-2x^2|\geq 3x^2$
b) $x^2\leq |6x-x^3|$
c) $|x^2-1|\geq x^3-x$

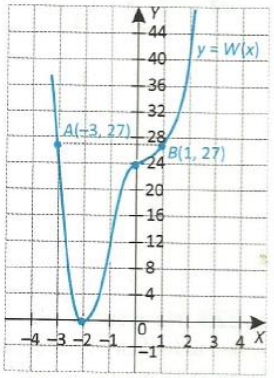
Zadanie 42: Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x^4+10x^3+25x^2}}$
b) $f(x)=\frac{100x-2}{\sqrt{-x^3+2x^2-3x+6}}$

Zadanie 43: Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji wielomianowej $y=W(x)$, gdzie wielomian $W(x)$ jest stopnia *3-go*. Funkcja *W* ma dwa miejsca zerowe 0,*5* oraz *2*, a do jej wykresu należy punkt *A.*

a) Napisz wzór tej funkcji.
b) Oblicz resztę z dzielenia wielomianu *W(x)* przez wielomian $P(x)=4x^2-8x+3$



Zadanie 44: Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu funkcji wielomianowej $y=W(x)$, gdzie wielomian $W(x)$ jest stopnia *4-go*. Funkcja *W* ma jedno miejsce zerowe *-2*, a do jej wykresu należą punkty *A* oraz *B.* Ponadto wykres funkcji *W* przecina oś OY w punkcie *(0, 24).*

a) Napisz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.