Zadania z wyrażeń wymiernych
(poziom rozszerzony)

Zadanie 1: Wyznacz dziedzinę wyrażenia wymiernego:

a) $\frac{4x-2}{x^3-3x^2}$

b) $\frac{x^5-7x}{x^2+5x+6}$

c) $\frac{x+1}{x^3-9x^2-x+9}$

d) $\frac{x^3+2}{x^4+x^2-20}$

Zadanie 2: Oblicz wartość wyrażenia wymiernego dla podanej obok liczby:

a) $F(x)=\frac{2}{x^4-3x}$ gdy $x=-2$

b) $G(x)=\frac{x+4}{x^3-x+1}$ gdy $x=-1$

c) $H(x)=\frac{x}{x^2-x}$ gdy $x=\sqrt{3}+1$

Zadanie 3: Skróć ułamki, podając konieczne założenia:

a) $\frac{x^2-4}{3x+6}$

b) $\frac{x^3-27}{2x^2-6x}$

c) $\frac{2x^2-3x-9}{4x^2-11x-3}$

d) $\frac{6x^2+13x-5}{9x^2+3x-2}$

e) $\frac{2x^7-2x^3}{x^6+x^4}$

f) $\frac{x^3+3x^2-25x-75}{x^2+8x+15}$

Zadanie 4: Wykonaj działania, wyznacz dziedzinę wyrażenia:

a) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{2}{3x+1}$

b) $\frac{2x+4}{x+1}-\frac{2x}{x-8}$

c) $\frac{x+5}{9x^2-6x+1}+\frac{1}{3x-1}$

d) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{x+1}{3-2x}+\frac{x^2-4}{4x^2-9}$

e) $\frac{x-2}{x^2-4x}+\frac{x^2-1}{x^2-8x+16}-\frac{1}{2x}$

Zadanie 5: Wykonaj działania, wyznacz dziedzinę wyrażenia:

a) $\frac{3x^2-3}{x^2-4x-5}\cdot\frac{7x-35}{2x-2}$

b) $\frac{5x^2+7x+2}{x^2+2x+1}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{25x^2-4}$

c) $\frac{2x^3+6x^2+x+3}{4x^2+11x-3}\cdot\frac{3x^2+2x-1}{2x^3+2x^2+x+1}$

d) $\frac{2x^2+6x}{x^2+4x+4}:\frac{x^2+6x+9}{x^2-4}$

e) $\frac{x^3-5x^2+2x-10}{x^2+x-30}:\frac{x^3+2x}{x+6}$

f) $2-\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+15x-8}:\frac{4x^2+14x+6}{x^2+9x+8}$

Zadanie 6: Wykonaj działania:

a) $\left(\frac{x}{x^3-1}-\frac{1}{x^2}\right):\left(\frac{x}{x^2+x+1}+\frac{1-x}{x^2}\right)$

b) $\left[\frac{(x^2-1)^2}{x^4-2x^2-3}\cdot(x^2-3)+\frac{4x^2}{x^2+1}\right]:\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

Zadanie 7: Wykaż, że jeżeli $a,b,c\in R-\{0\}$ i $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ to $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2}{c^2}$

Zadanie 8: Wykaż, że jeżeli $a,b>0$ i $a+b=3$ to $ab\leq 2\frac{1}{4}$

Zadanie 9: Rozwiąż równania:

a) $\frac{x+1}{x-5}=\frac{x-2}{x+1}$

b) $\frac{2x+3}{4x-5}=\frac{4x+5}{8x-7}$

c) $\frac{x^2+5}{3x^2-6x}=0$

d) $\frac{(x^2-5)(x+6)}{x^2+6x}=0$

e) $\frac{x}{2x-3}+\frac{1}{3-2x}=2x-2$

f) $\frac{2}{x-3}+\frac{4x}{x+2}=\frac{1}{3}$

g) $\frac{x^3-2x^2-5x+10}{2x-10}=0$

h) $\frac{x}{x+3}+\frac{1}{x+2}=\frac{x+6}{x^2+5x+6}$

i) $\frac{x+1}{x-3}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{x^2+x+12}{x^2-2x-3}$

j) $\frac{x+9}{x^2+x-12}-\frac{x+5}{x^2-x-6}=\frac{x-1}{x^2-9}$

k) $\frac{5x+11}{x+2}=|x+1|+6$

l) $\frac{x-2}{x-3}-2=|x-4|$

Zadanie 10: Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Zadanie 11: Do zbiornika o pojemności 700m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Zadanie 12: Z miejscowości *A* i *B* oddalonych od siebie o 182 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z miejscowości *B* do miejscowości *A* jedzie ze średnią prędkością mniejszą od 25 km/h. Rowerzysta jadący z miejscowości *A* do miejscowości *B* wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty. Rowerzyści spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z miejscowości *A* przebył do tego miejsca $\frac{9}{13}$ całej drogi z *A* do *B*. Z jakimi średnimi prędkościami jechali obaj rowerzyści?

Zadanie 13: Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał taką samą liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Zadanie 14: Samochód przejechał 180 km, jadąc ze stała prędkością. Gdyby jechał z prędkością o 30 km/h większa, to czas przejazdu skróciłby się o godzinę. Z jaka prędkością jechał samochód?

Zadanie 15: Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

Zadanie 16: Miasto *A* i miasto *B* łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Zadanie 17: Turysta pokonał pieszo trasę długości 30km z miejscowości *A* do miejscowości *B* ze stałą prędkością. Rowerem poruszałby się z prędkością o 9 km/h większą i przybyłby do celu o 3 godziny wcześniej. Wyznacz prędkość marszu turysty i czas przejścia tej drogi.

Zadanie 18: Rozwiąż nierówności:

a) $\frac{2-3x}{x^2+1} > 0$

b) $\frac{3x^2+2x+5}{2x^2-x+4} \geq 0$

c) $\frac{(x^2-16)(x+3)}{x^2+5x} \leq 0$

d) $\frac{x-3}{2x-1} > 1$

e) $\frac{5x-4}{3x-2} \leq 2$

f) $\frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{x+1}$

g) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$

h) $\frac{x}{x-3} + \frac{1}{x+2} + \frac{x+6}{x^2-x-6} > 0$

i) $\frac{x+3}{x+1} + \frac{8}{x-5} < \frac{x-13}{x^2-4x-5}$

j) $\frac{x}{x^2-x-6} - \frac{3}{x^2+3x+2} \geq \frac{2}{x+2}$

k) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| < 3$

l) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| \leq 1$

m) $\frac{(x+2)(x+1)}{x^2-|x|-2} \geq -3x$

n) $\frac{4x-1}{|x-1|} \geq |x+1|$

Zadanie 19: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $(m-2)x^2 - 3(m+2)x + 6m = 0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków?

Zadanie 20: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m - 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

Zadanie 21: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $\frac{x^2-(2m-1)x+9-m}{2x-1} = 0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie?

Zadanie 22: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $\frac{2x^2-(m-4)x+m+2}{x+2} = 0$ ma dwa różne rozwiązania ujemne?

Zadanie 23: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $\frac{2}{mx-2} = \frac{1}{9x-m}$ nie ma rozwiązań?

Zadanie 24: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $\frac{2m-1}{x+1} = \frac{x+5}{2}$ ma jedno rozwiązanie?

Zadanie 25: Brygada 16 robotników na wykonanie pewnej liczby części samochodowych potrzebuje 8 godzin i 15 minut. Ile czasu potrzeba na wykonanie tej samej pracy brygadzie 12 robotników, przy założeniu, że wydajność pracy każdego robotnika się nie zmieni?

Zadanie 26: Zapas żywności w stołówce szkolnej dla 60 osób wystarczy na 5 dni. Na ile dni wystarczyłoby tej żywności, jeśli liczba osób stołujących się w szkole wzrosłaby o 40 osób? (Zakładamy, że racje żywnościowe nie ulegną zmianie)?

Zadanie 27: Dana jest funkcja wymierna postaci: $F(x) = \frac{8x-1}{(m^2-4)x^2+(m+2)x+1}$ Wyznacz wartości parametru *m,* dla których dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych.

Zadanie 28: Funkcja $F(x) = \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x+3a}$ dla argumentu 1 przyjmuje wartość 3. Wyznacz wartość parametru *m*, miejsca zerowe tej funkcji oraz zbiór tych argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne.

Zadanie 29: Wyznacz liczby *a, b* tak, aby funkcje *W i F* były równe, jeśli:

a) $W(x) = \frac{a-1}{x+5} + \frac{b-1}{x+3}$ oraz $F(x) = \frac{5x+1}{x^2+8x+15}$

b) $W(x) = \frac{2a+1}{x-2} + \frac{b-2}{x+1}$ oraz $F(x) = \frac{x+13}{x^2-x-2}$

Zadanie 30: Narysuj wykres funkcji, a następnie na podstawie wykresu omów własności funkcji:

a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$

b) $f(x) = -\frac{1}{x} + 8$

c) $f(x) = \frac{3}{x-10} - 1$

d) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{x-5}{4x}$

f) $f(x) = \frac{-3x-5}{x+2}$

g) $f(x) = \frac{2x+4}{x+3}$

Zadanie 31: Dla jakich argumentów funkcja $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ przyjmuje wartości większe niż funkcja $g(x) = \frac{x-5}{x+2}$?

Zadanie 32: Funkcja $F(x) = \frac{2x+b}{x+c}$ jest funkcją homograficzną, malejącą w każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $(1, +\infty)$, a do jej wykresu należy punkt $A = (9; 2\frac{1}{2})$.

a) Oblicz wartości współczynników *b* i *c*.
b) Naszkicuj wykres funkcji
c) Podaj zbiór wartości funkcji
d) Wyznacz zbiór tych argumentów, dla których funkcja $F(x)$ przyjmuje wartości nie mniejsze niż funkcja $G(x) = \frac{x+5}{x-1}$

Zadanie 33: Naszkicuj wykres funkcji $F(x) = \left|-2 + \frac{3}{x+1}\right|$. Następnie ustal, dla jakich wartości parametru *m* równanie $F(x) = \frac{m+3}{m+2}$ ma dwa rozwiązania różnych znaków.

Zadanie 34: Funkcja $F(x) = \frac{ax-1}{x+b}$ jest funkcją homograficzną, której dziedziną jest zbiór $D = R - \{3\}$. Oblicz wartość współczynników *a, b* wiedząc, że miejscem zerowym jest liczba $\frac{1}{2}$. Następnie narysuj wykres tej funkcji.

Zadanie 35: Robotnik A może wykonać pewną pracę w czasie o 6 dni krótszym od robotnika B. gdyby pracowali razem, to wykonaliby tę pracę w ciągu 4 dni. Oblicz ile dni potrzebowałby każdy z robotników, gdyby pracował indywidualnie. (Odp. 12h, 6h)

Zadanie 36: Czas napełniania wanny jest o godzinę krótszy od czasu jej opróżniania. Jeżeli odkręcimy kran i otworzymy odpływ, to pusta wanna zostanie napełniona wodą w ciągu 12 godzin . Oblicz w ciągu ilu godzin jesteśmy w stanie napełnić wannę, gdy zamkniemy odpływ. (Odp. 3h)

Zadanie 37: Ojciec i syn zbierają w sadzie jabłka do skrzynek, które wkładają do samochodu dostawczego. Pracując jednocześnie, mogą załadować cały samochód w ciągu 6 godzin. Gdyby ojciec pracował sam, to załadowałby cały samochód w czasie o 5 godzin krótszym niż czas, w którym samodzielnie zrobiłby to syn. Oblicz, w jakim czasie ojciec załadowałby cały samochód, gdyby pracował sam. (Odp.10 h)

Zadanie 38: Pierwsza koparka wykonała połowę wykopu w ciągu 6 godzin, resztę wykopu wykonała druga koparka w ciągu 9 godzin. Ile czasu zajęłoby wykonanie wykopu, gdyby obie koparki pracowały jednocześnie? (Odp. 7 h 12 min)

Zadanie 39: Pompa o większej wydajności opróżnia pełny zbiornik w ciągu 8 godzin. Pompa o mniejszej wydajności opróżnia go w czasie trzy razy dłuższym, niż trwa opróżnianie zbiornika przez obie pompy pracujące jednocześnie. Ile czasu opróżnia zbiornik pompa o mniejszej wydajności? (Odp. 16 h)

Zadanie 40: Artur potrzebuje 10 godzin na pomalowanie pokoju, a Darek zrobiłby to w ciągu 6 godzin. Ile czasu zajęłoby im pomalowanie pokoju, gdyby pracowali razem? (Odp. 3 h 45 min)