Zadania z funkcji kwadratowej

(poziom podstawowy oraz rozszerzony)

Zadanie 1: Napisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2$, wiedząc że wykres przechodzi przez punkt:

a) $P = (2, -4)$

b) $P = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

c) $P = (\sqrt{3}, -6)$

Zadanie 2: Podaj wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, której wykres otrzymamy, przesuwając równolegle wykres funkcji *f* o podany wektor , a następnie narysuj w układzie współrzędnych otrzymaną w wyniku przesunięcia funkcję:

a) $f(x) = 2x^2, \vec{u} = [0, -5]$

b) $f(x) = -3x^2, \vec{u} = [2, 0]$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \vec{u} = [-1,3]$

Zadanie 3: Naszkicuj wykres funkcji danej wzorem, podaj współrzędne wierzchołka paraboli, zbiór wartości funkcji, maksymalne przedziały monotoniczności oraz równanie osi symetrii paraboli, jeśli:

a) $f(x) = -\frac{1}{4}(x + 3)^2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - 2$

d) $f(x) = -(x - 3)^2 + 1$

Zadanie 4: Wyznacz wzór funkcji kwadratowej o współczynniku kierunkowym równym *3*, wiedząc że ma ona wierzchołek w punkcie *W=(-4, 2).*

Zadanie 5: Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, jeśli dany jest wierzchołek *W* paraboli, będącej je wykresem oraz punkt *A* należący do tej paraboli, jeśli:

a) $W = (-3,0)\ \ oraz\ A = (-8, 15)$

b) $W = (0, -4)\ \ oraz\ A = (\frac{1}{2}, -6)$

c) $W = (-1,4)\ \ oraz\ A = (9, 34)$

Zadanie 6: Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej wiedząc, że dla argumentu -5 funkcja przyjmuje wartość największą równą -8, a do jej wykresu należy punkt *A=(-3,-9).*

Zadanie 7: Dana jest funkcja kwadratowa w postaci kanonicznej. Sprowadź do postaci ogólnej:

a) $f(x) = 3(x + 2)^2 - 6$

b) $f(x) = (x - 5)^2 + 4$

c) $f(x) = \frac{2}{7}(x + 3)^2 + \frac{3}{7}$

Zadanie 8: Dana jest funkcja kwadratowa w postaci ogólnej. Sprowadź do postaci kanonicznej:

a) $f(x) = x^2 - 2x$
b) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

Zadanie 9: Podaj współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej:

a) $f(x) = -7x^2 + 4$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 5$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

Zadanie 10: Wykres funkcji kwadratowej powstał w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = ax^2$ o wektor $\vec{v}$. Wyznacz wzór tej funkcji oraz współrzędne wektora, jeśli:

a) $f(x) = -10x^2 + 20x - 2$
b) $f(x) = \frac{5}{6}x^2 - 5x$

Zadanie 11: Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = x^2 + 10x + 17$
b) $f(x) = -x^2 - 6x - 19$

Zadanie 12: Napisz równanie osi symetrii wykresu funkcji kwadratowej:

a) $f(x) = 15x^2 + 20$
b) $f(x) = -4x^2 + \sqrt{3}x - 2014$

Zadanie 13: Wyznacz miejsca zerowe funkcji kwadratowej (o ile istnieją):

a) $f(x) = -2x^2 - 8x + 10$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 6$
c) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
d) $f(x) = 5x^2 + 10x + 5$
e) $f(x) = x^2 + 2x - 2$
f) $f(x) = (x - 1)^2 - 4$
g) $f(x) = -9(x + 2)^2 + 36$

Zadanie 14: Przedstaw wzór funkcji w postaci iloczynowej (o ile to możliwe):

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$
b) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
c) $f(x) = x^2 + 8x + 16$
d) $f(x) = -7x^2 + x - 100$

e) $f(x) = -(x+3)^2 + 9$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+7)^2 - 1$

Zadanie 15: Wyznacz współczynniki *a, b, c* funkcji kwadratowej danej wzorem:

a) $f(x) = 3(x-3)(x+7)$

b) $f(x) = -(x+10)(x+1)$

Zadanie 16: Wyznacz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, jeśli dane są jej miejsca zerowe oraz punkt *A* należący do wykresu tej funkcji, jeśli:

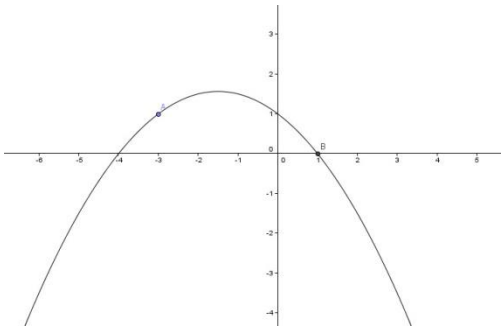
a) $x_1 = -2,\ x_2 = 3$ oraz $A = (2, -8)$

b) $x_1 = 1,\ x_2 = 6$ oraz $A = (7, 18)$

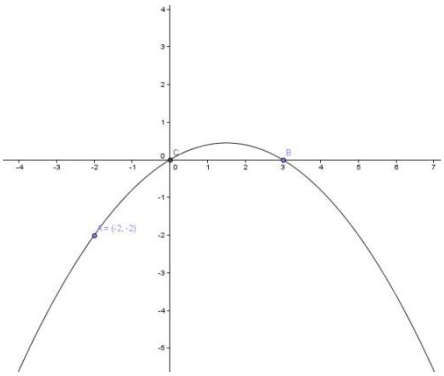
c) $x_0 = -8$ oraz $A = (-7, 2)$

Zadanie 17: Dany jest wykres funkcji kwadratowej. Napisz jej postać iloczynową , kanoniczną i ogólną, gdy:

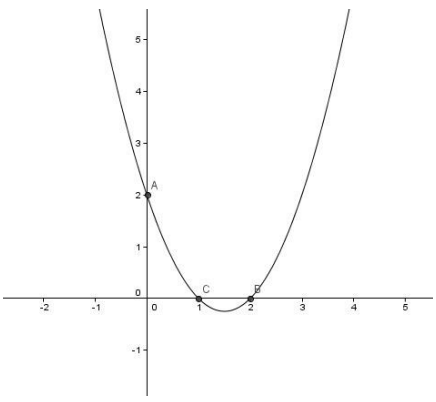
a)



b)



c)



Zadanie 18: Narysuj wykres funkcji kwadratowej i omów własności na podstawie wykresu:

a) $f(x) = 2(x-1)(x+1)$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$

c) $f(x) = -(x-1)^2 - 1$

Zadanie 19: Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 8x - 6 \ \ dla \ \ x \in (-\infty; 0) \\ -6 \ \ dla \ \ x \in < 0; \infty) \end{cases}$

a) Naszkicuj wykres tej funkcji

b) Podaj zbiór wartości funkcji

c) Oblicz wartość funkcji dla argumentu -4

d) Dla jakich argumentów funkcja osiąga wartości nieujemne?

Zadanie 20: Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej wiedząc, że przyjmuje ona wartości dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-8; -2)$, zaś największą wartością tej funkcji jest $2\frac{1}{4}$.

Zadanie 21: Napisz wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej wiedząc, że przyjmuje ona wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$, a jej zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 12\frac{1}{2} >$.

Zadanie 22: Funkcja kwadratowa ma tylko jedno miejsce zerowe, a osią symetrii jej wykresu jest prosta o równaniu $x - 5 = 0$. Do jej wykresu należy punkt $A = (2, -1\frac{4}{5})$. Napisz wzór funkcji w postaci ogólnej i naszkicuj jej wykres.

Zadanie 23: Naszkicuj wykres funkcji kwadratowej, wiedząc, że funkcja ta jest rosnąca jedynie w przedziale $(-\infty; -2 >$, zbiorem wartości jest przedział $(-\infty; 4 >$, zaś do wykresu należy punkt $A = (-1, 1)$. Następnie podaj drugi argument dla którego funkcja przyjmuje wartość 1 oraz wyznacz wzór tej funkcji.

Zadanie 24: Wyznacz ekstremum funkcji kwadratowej:

a) $f(x) = -3x^2 + x - 6$

b) $f(x) = 7x^2 + 5x + 1$

Zadanie 25: Oblicz wartość największą oraz najmniejszą funkcji kwadratowej w podanym przedziale:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 5 \ \ gdy \ \ x \in \langle 0; 3 \rangle$

b) $f(x) = -x^2 + 3x - 2 \ \ gdy \ \ x \in \langle 3; 4 \rangle$

c) $f(x) = x^2 + 3x + 4 \ \ gdy \ \ x \in \langle -1; 0 \rangle$

d) $f(x) = 2x^2 + x - 1 \ \ gdy \ \ x \in \langle -1; 1 + \sqrt{2} \rangle$

e) $f(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 1 \ \ gdy \ \ x \in \langle -2; -1 \rangle$

f) $f(x) = -\frac{3}{10}(x+2)^2 - 10 \ \ gdy \ \ x \in \langle -3; -1 \rangle$

Zadanie 26: Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy takich dwóch liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

Zadanie 27: Liczbę 30 przedstaw w postaci różnicy takich dwóch liczb, których suma kwadratów jest najmniejsza.

Zadanie 28: Strona książki ma obwód 68cm. Oblicz jakie wymiary powinna mieć strona tej książki, aby zapewnić maksymalną powierzchnię druku, jeśli zakłada się, że marginesy boczne i dolny będą jednocentymetrowe, zaś margines górny dwucentymetrowy.

Zadanie 29: Suma długości podstawy trójkąta i wysokości opuszczonej na te podstawę wynosi 30 cm. Wyznacz długość tej podstawy oraz wysokość tak, aby pole trójkąta było największe.

Zadanie 30: Zależność mocy P baterii samochodowej, od natężenia prądu I określa wzór $P(I) = V \cdot I - I^2 \cdot r$, gdzie V – napięcie, zaś r – opór wewnętrzny baterii. Jakie powinno być natężenie prądu, aby moc baterii była maksymalna?

Zadanie 31: Funkcja $f(x) = \frac{-x^2+6x+21}{2}$ opisuje wydajność pracy robotnika w zależności od czasu pracy *x*, w ciągu 8-godzinnego dnia pracy. Robotnik rozpoczyna pracę o godzinie 7.00.O której godzinie jego wydajność jest największa?

Zadanie 32: Właściciel gospodarstwa agroturystycznego chce wygrodzić w ogrodzie prostokątny plac zabaw dla dzieci. Dysponuje płotem długości 84m, a powierzchnia placu ma być możliwie największa. Wyznacz wymiary tego placu zabaw i oblicz jego powierzchnię.

Zadanie 33: Drut długości 100cm podzielono na dwie części: z jednej zbudowano kwadratową ramkę, a z drugiej okrąg. Jaka powinna być długość każdej części, aby suma pól figur ograniczonych drutem była najmniejsza?

Zadanie 34: Na bokach prostokąta o obwodzie 100cm, dorysowano trójkąty równoboczne. Jakie powinny być długości boków prostokąta, aby pole figury będącej sumą pola prostokąta i pól dorysowanych trójkątów było najmniejsze?

Zadanie 35: Właściciel sklepu kupuje aparaty fotograficzne, płacąc producentowi 120zł za sztukę, następnie sprzedaje miesięcznie 40 sztuk takich aparatów po 180 zł za sztukę. Sprzedawca oszacował, że każda obniżka ceny aparatu o złotówkę w jego sklepie zwiększy liczbę sprzedanych aparatów o jedną sztukę. Jaką powinien ustalić cenę, aby jego miesięczny zysk był największy?

Zadanie 36: Rozwiąż równanie kwadratowe:

a) $4x^2 - 9 = 0$
b) $x^2 + 27 = 0$
c) $9x^2 - 1 = 0$
d) $4x^2 - 6x = 0$
e) $-x^2 - 5x = 0$
f) $25x^2 + 10x + 1 = 0$
g) $-x^2 + 4x + 21 = 0$
h) $3(x^2 + 2x + 5) = x(25 - 3x)$
i) $(2x - 1)^2 - (4x - 1)(4x + 1) = 4x(1 - 2x)$
j) $(x - 1)^2 + 2(x - 3)^2 = 18 - 10x$

Zadanie 37 (R): Rozwiąż równanie:

a) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$
b) $6x^4 + x^2 = 2$
c) $x^6 - 5x^3 + 4 = 0$
d) $x^8 + 8x^4 + 16 = 0$
e) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$
f) $x + \sqrt{x-1} + 7 = 0$
g) $6x - \sqrt{x-5} - 31 = 0$
h) $2\sqrt{x} - 7\sqrt[4]{x} + 6 = 0$
i) $2x^2 - 5\sqrt{x^2+2} = -6$

Zadanie 38: Rozwiąż nierówność kwadratową:

a) $4x^2 - 16 < 0$
b) $x^2 + 64 \geq 0$
c) $9x^2 - 1 > 0$
d) $2x^2 - 8x \leq 0$
e) $-3x^2 + 4x > 0$
f) $49x^2 + 14x \leq -1$
g) $-x^2 + 2x > 5$
h) $-3(2x+6)(x+5) < 0$
i) $(2x+1)^2 - 9(x-1)^2 \geq 4 - x$
j) $-2x^2 + 5(x+1) < 2(x+2) - 3x(x-1)$

Zadanie 39 (R): Rozwiąż równanie bądź nierówność:

a) $\sqrt{1-3x} + 3 + x = 0$
b) $\sqrt{1-5x} = 7 + x$
c) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2$
d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$
e) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \leq 1$
f) $\sqrt{x-2} < 8 - x$
g) $\sqrt{x^2+x-2} < x$

Zadanie 40: W liczbie trzycyfrowej cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry setek, zaś cyfra jedności o 1 mniejsza od cyfry dziesiątek. Kwadrat cyfry dziesiątek jest równy sumie kwadratów pozostałych cyfr. Wyznacz tę liczbę.

Zadanie 41: Suma kwadratów dwóch liczb różniących się o 4 wynosi 400. Wyznacz te liczby.

Zadanie 42: Ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest o 117 większa od liczby jego boków?

Zadanie 43: Na spotkaniu towarzyskim każdy uczestnik przywitał się z każdym z pozostałych i w ten sposób wymieniono 45 uścisków dłoni. Ile osób uczestniczyło w tym spotkaniu?

Zadanie 44: Park miejski jest w kształcie rombu, którego obwód wynosi 2 km. Dwie główne alejki spacerowe wyznaczone są przez przekątne rombu, a jedna z nich jest o 200 m dłuższa od drugiej. Oblicz długość tych alejek spacerowych.

Zadanie 45: Do turnieju siatkówki zgłosiły się reprezentacje klas pierwszych. Klasy rozegrały każda z każdą po jednym meczu. Rozegrano łącznie 10 meczów. Ile klas brało udział w tym turnieju?

Zadanie 46: „Bawiły się raz małpy –wieść indyjska niesie-

Ósma ich część w kwadracie już skacze po lesie,

Pozostałych dwanaście w pląsach i z wrzaskami

Pomiędzy zielonymi hasa pagórkami.

Ileż ich wszystkich było? – pyta się Bhashara (matematyk hinduski z XII wieku)

Zagadka nie jest trudna, chociaż bardzo stara.”

Zadanie 47: Pewien człowiek zapytany, ile ma lat, odpowiedział: „Jeżeli całkowitą liczbę moich lat pomnożymy przez liczbę o 50 mniejszą i do otrzymanego iloczynu dodamy 624 to otrzymamy liczbę ujemną. ”Czy na tej podstawie można ustalić ile lat ma ten człowiek?

Zadanie 48: Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 30, a suma kwadratów długości wszystkich boków trójkąta wynosi 338. Wyznacz długość wysokości poprowadzonej na przeciwprostokątną?

Zadanie 49: W trójkącie ABC dane są |AB|=2, |BC|=3 oraz cosinus kata BAC jest równy $\frac{11}{16}$. Oblicz obwód trójkąta ABC oraz promień koła opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 50: Na płaszczyźnie zaznaczono *n* punktów, z których dowolne trzy nie są współliniowe. Następnie połączono te punkty odcinkami. Ile jest tych punktów, jeśli wyznaczyły one 15 odcinków.

Zadanie 51: Pewna grupa przyjaciół wysyła sobie nawzajem życzenia z okazji Świąt Wielkanocnych. Wysłano łącznie 210 kartek świątecznych. Ilu było przyjaciół?