Zadania z funkcji kwadratowej z parametrem i wartością bezwzględną

(poziom rozszerzony)

Zadanie 1: Określ znaki miejsc zerowych funkcji kwadratowej nie licząc ich:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8x - 24$

Zadanie 2: Oblicz miejsca zerowe stosując wzory Viete'a:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

b) $f(x) = -x^2 - 4x + 5$

c) $f(x) = -x^2 - 6x + 27$

Zadanie 3: Wyznacz współczynniki *b, c* we wzorze funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 + bx + c$ wiedząc, że miejsca zerowe funkcji spełniają warunki:

a) $x_1 = -2{,}5$ oraz $x_1 + x_2 = -1{,}5$

b) $x_1 = 3$ oraz $x_1 + x_2 = 10$

c) $x_1 = 9$ oraz $x_1 \cdot x_2 = -63$

Zadanie 4: Oblicz wartości poniższych wyrażeń, korzystając ze wzorów Viete'a wiedząc, że $x_1,\ x_2$ są pierwiastkami funkcji kwadratowej $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

Zadanie 5: Funkcja kwadratowa *f* ma dwa miejsca zerowe takie, że $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 7$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 1$. Do jej wykresu należy punkt $A = (-2, -6)$. Napisz wzór funkcji *f* w postaci ogólnej.

Zadanie 6: Zbadaj liczbę rozwiązań równania ze względu na wartość parametru *m*. Napisz wzór i naszkicuj wykres funkcji $y = g(m)$, która każdej wartości parametru *m* przyporządkowuje liczbę rozwiązań równania:

a) $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

b) $(2m-3)x^2 + 4mx + m - 1 = 0$

c) $(m-3)x^2 + (m-2)x + 1 = 0$

Zadanie 7: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma dwa różne rozwiązania?

a) $(m-2)x^2+(m+5)x-m-1=0$
b) $x^2+4x+2m-10=0$

Zadanie 8: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie nie ma rozwiązania?

a) $(m+1)x^2+4x+7=0$
b) $-2x^2+x+m-3=0$

Zadanie 9: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma tylko jedno rozwiązanie?

a) $(2m+1)x^2+2x+5=0$
b) $-4x^2+m-1=0$

Zadanie 10: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma dwa rozwiązania rzeczywiste różnych znaków?

a) $x^2+(2m-3)x+2m+5=0$
b) $2x^2-3(m-1)x+1-m^2=0$

Zadanie 11: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste jednakowych znaków?

a) $x^2+2(m+4)x+m^2-2m=0$
b) $4x^2+(4m-12)x+m(m+2)=0$

Zadanie 12: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dodatnie?

a) $x^2-mx+\frac{1}{4}m(m-1)=0$
b) $x^2-2mx-(m-2)(m+2)=0$

Zadanie 13: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste ujemne?

a) $x^2+mx-m+3=0$
b) $x^2-2mx+m^2-4=0$

Zadanie 14: Wyznacz te wartości parametru *m* dla których nierówność jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą:

a) $-x^2+(m+2)x+8m-1<0$
b) $(4-m)x^2-3x+m+4>0$
c) $(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3<0$

Zadanie 15: Dla jakich wartości parametru *m* dziedziną funkcji *y = f(x)* jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych?

a) $f(x)=\sqrt{x^2-mx+m+3}$
b) $f(x)=\sqrt{mx^2-(1+m)x+1}$

Zadanie 16: Dla jakiej wartości parametru *k* różne rozwiązania równania $kx^2 - (k+1)x - 2k + 3 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = k + 1$

Zadanie 17: Dla jakiej wartości parametru *k* suma odwrotności różnych rozwiązań równania $x^2 + kx - 16 = 0$ jest równa *-4?*

Zadanie 18: Dla jakiej wartości parametru *p* równanie $x^2 + 5px + 20p - 8 = 0$ ma różne rozwiązania spełniające warunek $x_1^2 + x_2^2 = 400$

Zadanie 19: Dla jakiej wartości parametru *p* równanie $x^2 + 2(p-1)x + (p-2)(p+2) = 0$ ma dwa różne rozwiązania których suma kwadratów jest mniejsza od 12?

Zadanie 20: Wyznacz wszystkie wartości parametru *k,* dla których różne rozwiązania równania $x^2 + (k+2)x + 4 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = k$

Zadanie 21: Wyznacz wszystkie wartości parametru *k,* dla których różne rozwiązania równania $x^2 - (k-1)x + 1 = 0$ spełniają warunek $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \geq 2k^2 - k - 21$

Zadanie 22: Wyznacz wszystkie wartości parametru *k,* dla których różne rozwiązania równania $x^2 - (k+1)x + k = 0$ spełniają warunek $(x_1 + 3x_2)(x_2 + 3x_1) = 16$

Zadanie 23: Dla jakich wartości parametru *m* równanie $x^2 - (m+1)x + 1{,}2m = 0$ ma dwa rozwiązania z których jedno jest równe sinusowi, a drugie cosinusowi tego samego kąta ostrego?

Zadanie 24: Dla jakich wartości parametru *m* każde z dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ jest większe od 3?

Zadanie 25: Dla jakich wartości parametru *m* każde z dwóch różnych rozwiązań równania $x^2 + mx + 4 = 0$ jest mniejsze od 4?

Zadanie 26: Naszkicuj wykres funkcji oraz omów znane ci własności funkcji:

a) $f(x) = |x^2 - 3x|$
b) $f(x) = |x^2 + 2x - 8|$
c) $f(x) = |x^2 - 1|$

Zadanie 27: Naszkicuj wykres funkcji oraz omów znane ci własności funkcji:

a) $f(x) = x^2 - |x|$
b) $f(x) = -x^2 + 3|x|$
c) $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$

Zadanie 28: Naszkicuj wykres funkcji oraz omów znane ci własności funkcji:

a) $f(x) = |x^2 - 1| + x^2$

b) $f(x) = |x^2 - 4| - 2x$
c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 3$
d) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$
e) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 2x|$

Zadanie 29: Rozwiąż równania:

a) $x^2 + 4x + |x + 2| = 16$
b) $x^2 - 3|x - 3| = 6x - 11$
c) $x^2 + 2x + 2 = 2|x + 1|$
d) $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$
e) $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$
f) $|x^2 - 4| + |x^2 - 5| = 1$
g) $|x^2 - 1| + |x^2 - 16| = 3$

Zadanie 30: Rozwiąż nierówności:

a) $x^2 - 7|x| + 10 \leq 0$
b) $x^2 + 4|x| + 3 < 0$
c) $(x - 1)^2 + |x - 1| > 6$
d) $x^2 - 4x + |x - 1| + 3 \leq 0$
e) $x^2 + |x - 2| < 8x - 19$
f) $x^2 + 4x + |x - 3| + 5 > 0$
g) $|x^2 + 3x + 1| \leq 1$
h) $|x^2 + 6x - 1| \leq 6$

Zadanie 31: Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru *m*:

a) $|x^2 - 4x + 3| = m$
b) $|-x^2 + 2x + 3| = m$
c) $x^2 + 4|x| + 3 = m$
d) $|x^2 - 4| = m^2 + 3$
e) $-x^2 + 2|x| = m^2 - 2$

Zadanie 32: Dla jakiej wartości parametru *k* równanie $2x^2 - k|x| + k - 2 = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

Zadanie 33: Dla jakiej wartości parametru *k* równanie $-x^2 + (k - 3)|x| = 0{,}25(k^2 - 1)$ nie ma rozwiązania?

Zadanie 34: Dla jakiej wartości parametru *k* równanie $|x^2 - 4| = (k^2 - 5)|x - 2|$ ma trzy rozwiązania, z których jedno jest dodatnie i dwa ujemne?

Zadanie 35: Dla jakiej wartości parametru *k* równanie $x^2 - (k + 1)|x| + 1 = 0$ ma cztery różne rozwiązania?

Zadanie 36: Dla jakiej wartości parametru *m* równanie $x|x - 1| = m + 1$ ma dwa różne rozwiązania?