Zadania z potęg, funkcji wykładniczej i logarytmów

(poziom rozszerzony)

Zadanie 1: Oblicz:

a) $\sqrt{147^2 \cdot 6^2 + 147^2 \cdot 8^2}$

b) $\sqrt{113^2 - 112^2} - \sqrt{89^2 - 80^2}$

Zadanie 2: Jakim procentem liczby x jest liczba y, jeśli $x = \frac{27^9+81^7}{9^{13}}$ oraz $y = \frac{8^{16}+4^{25}}{5 \cdot 16^{12}}$

Zadanie 3: Przedstaw w postaci jednej potęgi:

a) $\frac{125^3 \cdot (\frac{1}{5})^4}{25^3 \cdot \sqrt{5}}$

b) $\frac{64^{-2} \cdot \sqrt{2}}{4^6 : 2^3}$

Zadanie 4: Zamień na potęgę:

a) $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}$

b) $\sqrt{125\sqrt[7]{5}}$

Zadanie 5: Oblicz:

a) $\sqrt{9} \cdot [(1{,}5)^{-1} + 9^{-1{,}5}] - 27^{-\frac{2}{3}}$

b) $\frac{\left(6-11^{\frac{1}{2}}\right)\left(6+11^{\frac{1}{2}}\right)}{(\sqrt{6-\sqrt{11}}-\sqrt{6+\sqrt{11}})^2}$

Zadanie 6: Wykaż, że:

a) $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 1$

b) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = -1$

Zadanie 7: Naszkicuj wykres funkcji wykładniczej i omów jej własności:

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

c) $f(x) = 2^{x-4} - 2$

d) $f(x) = 4^{-x+1}$

e) $f(x) = 3^{-x} + 3$

Zadanie 8: Napisz wzór funkcji wykładniczej $g(x)$ powstałej z $f(x) = 8^x$ w wyniku przekształcenia:

a) Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [2{,}0]$

b) Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [0, -4]$

c) Przesunięcie o wektor $\vec{u} = [-4, -1]$

d) Symetria względem osi OX

e) Symetria względem osi OY

f) Symetria względem początku układu współrzędnych

Zadanie 9: Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^x$, a następnie naszkicuj wykres funkcji *g*, wiedząc, że $g(x) = f(-x) - 4$.

a) Napisz wzór funkcji *g*

b) Oblicz współrzędne punktu wspólnego wykresu funkcji *g* i osi OY

c) Sprawdź czy liczba -2 jest miejscem zerowym funkcji *g*

d) Odczytaj z wykresu zbiór wszystkich argumentów, dla których funkcja *g* przyjmuje wartości ujemne

Zadanie 10: Naszkicuj wykres funkcji i omów jej własności:

a) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

b) $y = -3^{|x|} + 4$

c) $y = |2^{-x} - 1|$

d) $y = |2^{x-2} - 4|$

Zadanie 11: Rozwiąż graficznie równanie, bądź nierówność:

a) $-2^{x-1} = -1{,}5x + 0{,}5$

b) $4^{|x|} = 5 - |x|$

c) $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| = -2x^2 - 8x - 5$

d) $2^{x-2} \leq 5 - x$

e) $2^{|x|} < 3 - |x|$

Zadanie 12: Zbadaj liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru *m*:

a) $4^{x-1} = m + 2$

b) $\left|2 - \left(\frac{1}{3}\right)^x\right| = m^2 - 1$

c) $2^{|x-2|+x} = m^2$

Zadanie 13: Rozwiąż równania, bądź nierówności:

a) $(\frac{5}{8})^{x+2} = 1$

b) $(\frac{2}{3})^{x^2-3x} = (\frac{9}{4})^{x-3}$

c) $(2\sqrt{2})^{x+1} = \frac{1}{4^{-x+2}}$

d) $2^{x^3+x^2} = 32^{x+1}$

e) $(7\sqrt{7})^{4x+2} = (\frac{49}{\sqrt[3]{7}})^{3x-6}$

f) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14$

g) $3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 15$

h) $\frac{9^x}{27} < 27^{x+8}$

i) $0{,}5^{x^2-9x+17{,}5} \leq \frac{8}{\sqrt{2}}$

j) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 5 \cdot 2^{x+2} > 34$

Zadanie 14: Rozwiąż równania wykładnicze:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 = 0$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 24 \cdot 5^{-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 0$

c) $7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 5 = 0$

d) $\frac{3^x+2}{3^x+3} = \frac{3^x-2}{3^x-3}$

e) $\frac{1}{2^x-2} + 2^{1-x} = 1$

f) $4^{1+5+9+13+\cdots+(4x-3)} = 64$

g) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2+4+6+\cdots+2x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{12}$

Zadanie 15: Rozwiąż nierówności wykładnicze:

a) $8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8x} - 30 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} + 27 \geq 0$

b) $16^x + 3 \cdot 2^{2x+1} + 8 < 0$

c) $8^{3x} - 3 \cdot 8^{2x} - 6 \cdot 8^x + 8 \geq 0$

d) $4{,}5^{3+6+9+\cdots+3x} \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{-9}$

e) $2^x + 4^x + 8^x + \cdots \leq \frac{2^{x+1}+1}{2}$

Zadanie 16: Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* dla których równanie $4^x + (m-2)\cdot 2^x + 4 = 0$ ma dwa różne rozwiązania.

Zadanie 17: Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* dla których równanie $3^x - 2(m-1)\cdot 3^x + m + 5 = 0$ ma jedno rozwiązanie.

Zadanie 18: Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* dla których równanie $(m+1)\cdot 49^x + 2(m-3)\cdot 7^x + m - 1 = 0$ nie ma rozwiązań.

Zadanie 19: Oblicz:

a) $log_{\frac{1}{4}}4$
b) $log_{25}5$
c) $log_2\frac{1}{64}$
d) $log_{0,27}1$
e) $log_{\sqrt{5}}5$
f) $log\sqrt[3]{10}$
g) $log\frac{\sqrt[4]{1000}}{10}$
h) $log_{0,2}625$
i) $log_{\frac{1}{9}}3\sqrt{3}$
j) $log_2 log_5\sqrt[4]{5}$
k) $log_{\sqrt{6}}log_{\sqrt{3}}27$

Zadanie 20: Oblicz stosując własności działań na logarytmach:

a) $3^{log_3 5} + log_5 25^3$
b) $27^{log_3 2} - log_{27}1$
c) $64^{log_2\sqrt{3}} + log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^3$
d) $\frac{log_4 81}{log_4 3}$
e) $\frac{log_7 5}{log_7 125}$
f) $2^{4+log_2 5}$
g) $5^{3+log_{25}2}$
h) $6^{2-log_{\sqrt{6}}3}$
i) $log_2 12 - \frac{log_2 144}{log_2 4}$
j) $log_5 150 + \frac{log_5 30}{log_5\frac{1}{5}}$
k) $2log_6 12 - 2log_6 2$
l) $log_2 8 - log_2 5 + log_2 10 - 3log_2 2$

Zadanie 21: Wyznacz liczbę *x,* podając odpowiednie założenia*:*

a) $log_{\sqrt{2}}x = 3$
b) $log_{125}x = \frac{4}{3}$
c) $log_{\sqrt{3}}x = -\frac{1}{2}$
d) $log_x 5 = -\frac{1}{3}$
e) $log_x 9 = 2$
f) $log_x\frac{1}{16} = -\frac{4}{5}$

Zadanie 22: Oblicz:

a) $log_3 6 \cdot log_6 9$
b) $log_{16}11 \cdot log_{11}4$
c) $2log_3 2 \cdot log_4\sqrt{3}$

Zadanie 23: Oblicz:

a) Jeśli $log_a b = 5$ wyznacz $log_{a^3}b^2$
b) Jeśli $log_2 3 = a$ wyznacz $log_8 9$
c) Jeśli $log_5 2 = m$ wyznacz $log_4 25$

Zadanie 24: Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \log_{x+1}(4 - x^2)$
b) $f(x) = \log_{x^2-1}(x^2 - 2x - 3)$
c) $f(x) = \log_{x+3}\frac{x}{x+1}$
d) $f(x) = \log_x\left(2^x - 16\sqrt{2}\right)$

Zadanie 25: Naszkicuj wykres funkcji *f(x)* oraz omów własności:

a) $f(x) = \log_2(x - 1) - 2$
b) $f(x) = \log_3(x + 3) + 1$
c) $f(x) = \log_3(-x) - 2$
d) $f(x) = 1 - \log_2(x + 3)$
e) $f(x) = |\log_2(x + 4)|$
f) $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{3}}|x + 2|\right|$

Zadanie 26: Wykaż, że funkcja $f(x) = \log_2(1 - x) - \log_2(x + 1)$ jest nieparzysta.

Zadanie 27: Wykaż, że funkcja $f(x) = \log_3 cos2x$ jest parzysta.

Zadanie 28: Rozwiąż graficznie równanie, bądź nierówność:

a) $\log_2(x - 1) = 4 - x$
b) $\log_4|x| = 1 - x^2$
c) $\log_2(x - 2) - 1 \geq 4x - x^2$
d) $|\log_3 x| > 0{,}5x - 2{,}5$

Zadanie 29: Rozwiąż równania, bądź nierówności:

a) $log_2(x + 4) = 3$
b) $log_2(x - 7) \geq 4$
c) $log_x(2x - 1) = 2$
d) $log_3(x + 10) - log_3(7 - 2x) = -4$
e) $log_2(x - 6) \leq log_2(2x + 4)$
f) $\log(x - 1) + \log(x + 1) = 0$
g) $\log_3(x^2 - 4x + 3) < 1$
h) $log_{x^2-x}(x + 3) < 1$

Zadanie 30: Oblicz wartość wyrażenia a^{-b}, jeśli $a = \left(5^{\frac{log_{100}3}{log3}} \cdot 5^{\frac{log_{100}5}{log5}}\right)^{2log_{15}8}$

oraz $b = \sqrt[4]{36 - 16\sqrt{5}} \cdot (4 + 2\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$

Zadanie 31: Oblicz: $log_6 2 \cdot log_6 18 + log_6^2 3$

Zadanie 32: Wiedząc, że $log_3 20 = a$ oraz $log_3 15 = b$, wyznacz $log_2 360$

Zadanie 33: Wiedząc, że $a = \frac{log8}{log81}$ oraz $b = \frac{1}{log64}$, oblicz wartość wyrażenia $27^{4a} + 16^{3b}$.
Wynik podaj w najprostszej postaci.

Zadanie 34: O ile procent liczba $log8$ jest mniejsza od liczby $log^2 4 + log25 \cdot log4$

Zadanie 35: Oblicz $log_a\sqrt{ab}$ wiedząc, że $log_a b = 5$ dla $a, b > 0$ oraz $a \neq 1$

Zadanie 36: Wyznacz wszystkie wartości *x* dla których ciąg: $log2,\ log(2^x - 1),\ log\ (2^x + 3)$ jest ciągiem arytmetycznym. Podaj jego różnicę.

Zadanie 37: Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* dla których równanie: $x^2 + 2x + \frac{1}{4}\log_2(m + 1) = 0$ ma dwa różne rozwiązania, których suma odwrotności jest równa *-8*.

Zadanie 38: Wyznacz wszystkie wartości parametru *m* dla których nierówność: $x^2 \cdot \log_3 m + 2x - 1 < 0$ jest spełniona przez dowolną liczbę rzeczywistą.