Elementy kombinatoryki

Permutacje

Historyjka opisana przez Juliana Tuwima w jednym z jego felietonów matematycznych:

Zadanie 1: „Czternaście osób jadało codziennie obiady przy podłużnym stole. Wszyscy zajmowali zawsze te same miejsca. Pewnego dnia siedzący na szarym końcu najmłodszy ze stołowników wystąpił z projektem, by miejsca zajmować za każdym razem inaczej, aż do wyczerpania wszystkich możliwych rozmieszczeń. Po obiedzie starszy pan, nauczyciel matematyki w gimnazjum, zaprosił młodego człowieka na kawę.

- Więc Pan chciałby przesadzać czternaście osób, codziennie w innej kolejności, aż do wyczerpania wszystkich możliwych kombinacji, czy tak?

- Tak jest proszę pana.

- I co pan sądzi, jak to długo będzie trwało, aż pan te wszystkie możliwe kombinacje wyczerpie?

- No, nie wiem ... może nawet parę tygodni ... ale musi być sprawiedliwość.

- Owszem, musi być – odrzekł fundator kawy i zaczął cos obliczać ołówkiem na marmurze stolika. Po paru minutach powiedział:

- Ale będzie to, panie drogi, trwało – niech pan słucha: dwieście trzydzieści osiem milionów osiemset czterdzieści cztery tysiące sześćset trzydzieści trzy lata.

Osłupiałem myśląc, że mam do czynienia z wariatem."

Definicja 1: ***Permutacją zbioru skończonego nazywamy każde ustawienie wszystkich jego elementów w dowolnej kolejności. Dwie permutacje uważamy za różne, gdy przynajmniej dwa elementy występują w nich na różnych miejscach.***

Zadanie 2: Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób? (3 dziewczynki i 2 chłopców) Wśród tych osób jest Ola. Na ile sposobów można ich ustawić tak aby Ola stała na końcu kolejki? A gdybym dziewczęta postawiła na początku kolejki, to ile byłoby różnych możliwych ustawień? Chciałabym aby koleżanki Ola i Ala stały obok siebie w kolejce. Ile jest możliwych ustawień w takiej sytuacji?

Zadanie 3: Dzienny plan zajęć składa się z siedmiu godzin, w tym trzech godzin matematyki, dwóch polskiego i dwóch historii. Ile jest różnych sposobów ułożenia planu tak by:

a. przedmioty były ułożone blokami.
b. przedmioty nie koniecznie były ułożone blokami.
c. język polski był na ostatnich dwóch lekcjach.
d. pierwszą lekcją była matematyka, a ostatnią historia.
e. na trzeciej lekcji była matematyka.

Zadanie 4: Ile liczb naturalnych większych od 3000 i zapisanych za pomocą różnych cyfr można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4?

Zadanie 5: Pewien biznesmen zapomniał hasła do zamka swojej aktówki. Hasło jest liczbą siedmiocyfrową, złożoną z cyfr od 1 do 7 włącznie. Cyfry w haśle nie powtarzają się i ostatnie trzy są wybrane ze zbioru {5, 6, 7}. Ile możliwości w najgorszym przypadku trzeba sprawdzić, aby otworzyć zamek?

Wariacje bez powtórzeń

Wiersz pod tytułem „Wariacje Rodego na temat arcygenialny oczekujący utalentowanego Maestra”, który to Julian Tuwim odnalazł przeglądając stare roczniki „Kuriera Świątecznego”:

Temat

Gdy pies z pieczenią przez okno fika,

Bocian nad wodą żabę połyka.

Wariacja I

Gdy pies z bocianem przez pieczeń fika,

Okno nad żabą wodę połyka.

Wariacja II

Gdy okno przez psa z pieczenią fika,

Żaba nad wodą bociana łyka.

Itd. Itd. Wariacji tych podobno jest 12, a Tuwim cytuje 6.

Definicja 2: Wariacją bez powtórzeń *k* – elementową zbioru złożonego z *n* różnych elementów nazywamy każdą permutację dowolnego *k* – elementowego podzbioru tego zbioru. Liczba V_n^k wszystkich takich wariacji wyraża się wzorem: $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$**.**

Zadanie 1: Ile jest możliwości rozdziału trzech medali (złotego, srebrnego, brązowego) pomiędzy 5 zawodników?

Zadanie 2: W urnie jest dziesięć kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy kolejno i bez zwrotu pięć kul. Po każdym losowaniu zapisujemy numer kuli. Ile jest wszystkich możliwych wyników losowania?

Zadanie 3: Rzucamy trzy razy sześcienną kostka do gry. Po każdym rzucie zapisujemy liczbę wyrzuconych oczek. Ile jest możliwych wyników, w których liczby oczek nie powtarzają się?

Zadanie 4:W ogłoszonym w 2002 roku plebiscycie na najlepszych dziesięciu sportowców roku zgłoszono kandydatury siedemnastu zawodników. Plebiscyt, wygrał Adam Małysz. Oblicz, ile istniało sposobów przyznania dalszych miejsc zgłoszonym kandydatom. Wykluczamy przypadek miejsc ex aequo.

Zadanie 5: Ile istnieje liczb pięciocyfrowych, o nie powtarzających się cyfrach?

Wariacje z powtórzeniami

Definicja 3: Wariacją z powtórzeniami *k* – elementową zbioru *n* –elementowego nazywamy każdy *k* – wyrazowy ciąg elementów tego zbioru. Liczba W_n^k wszystkich takich wariacji wyraża się wzorem: $W_n^k = n^k$ **.**

Zadanie 1: Ile jest możliwych sześciocyfrowych numerów telefonicznych zaczynających się od 51?

Zadanie 2: Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje zero?

Zadanie 3: Rzucamy czterema monetami. Ile istnieje wszystkich możliwych wyników rzutu?

Zadanie 4: Na ile sposobów można wypełnić test złożony z 25 pytań, jeżeli na każde pytanie trzeba odpowiedzieć TAK, NIE lub NIE WIEM?

Zadanie 5: Załóżmy, że numer rejestracyjny samochodu składać się może z trzech dowolnych dużych liter alfabetu łacińskiego, po których następują cztery dowolne cyfry. Ile jest takich numerów?

Kombinacje

Zadanie 1: Z grupki dziewcząt o imieniu Ania, Basia, Kasia i Jola wybieramy dwie dziewczynki do zawodów sportowych. Ile jest sposobów wyboru tych dziewczynek?

Definicja 4: Kombinacją *k* – elementową zbioru *n* – elementowego nazywamy każdy *k* – elementowy podzbiór tego zbioru. Liczba C_n^k wszystkich takich kombinacji wyraża się wzorem: $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ **.**

Zadanie 2: W klasie liczącej 32 osoby jest tylko 6 chłopców. Na ile sposobów można wybrać 5 – osobową delegację tej klasy tak, aby w składzie delegacji znajdował się, co najmniej jeden chłopiec?

Zadanie 3: Z talii 24 kart wybieramy losowo trzy karty. Ile jest sposobów wyboru tych kart tak, aby były wśród nich 2 *króle* i 1 *as*?

Zadanie 4: Z talii 52 kart wybieramy losowo 5 kart. Ile jest sposobów wyboru tych kart tak, aby co najmniej 4 były koloru czerwonego?

Zadanie 5: Z talii 24 kart wybieramy losowo cztery karty. Ile jest sposobów wyboru tych kart tak, aby były wśród nich, co najwyżej 2 *damy*?

Zadanie 6: Z talii 52 kart wybieramy losowo cztery karty. Ile jest sposobów wyboru tych kart tak, aby były wśród nich dwie *figury* i jedna *trójka*?

Zadanie 7: Ile słów można utworzyć ze słowa *MATEMATYKA*, przestawiając litery? *Słowo* oznacza tu dowolny skończony ciąg liter.