Zadania z ciągów liczbowych

(poziom rozszerzony)

1. Podaj ogólny wyraz następujących ciągów:
   a) 1, -2, 3, -4, 5, -6, …
   b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$
   c) $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{81}, \ldots$
2. Dany jest wyraz ogólny nieskończonego ciągu (a_n). Podaj cztery pierwsze wyrazy tego ciągu, a następnie oblicz: a_{2k} oraz a_{2k-1}, jeśli:
   a) $a_n = 2n^2 - 4n + 1$
   b) $b = 4 - n^2$
   c) $c_n = \sqrt{n-1}$
   d) $d_n = \frac{n-1}{n+2}$
3. Naszkicuj wykres ciągu o wzorze:
   a) $a_n = n^2 - n + 1$ gdy $n \leq 4$
   b) $a_n = 2^{n-1}$ gdy $n < 4$
4. Które wyrazy ciągu są równe zeru, jeśli:
   a) $a_n = \frac{n^2-4n-21}{n^2+1}$
   b) $b_n = \frac{n^4-256}{n^2-n+2}$
   c) $c_n = 5(n^2-2)(n^2-4)(n-3)$
5. Które wyrazy ciągu są dodatnie?
   a) $a_n = \frac{n^2-16n+39}{n+4}$
   b) $b_n = \frac{10-n}{3n-16}$
   d) $c_n = \frac{n^2-4n-21}{n^2+1}$
6. Które wyrazy ciągu są ujemne?
   a) $a_n = \frac{9-n}{7-3n}$
   b) $b_n = \frac{n-6}{n+3}$
   c) $c_n = -n^2 + 10n + 11$
7. Które wyrazy ciągu $a_n = \frac{n^2+11n+8}{n}$, równają się liczbie 17? Jakie jeszcze inne wyrazy w tym ciągu są liczbami naturalnymi?
8. Ile wyrazów ujemnych ma ciąg a_n określony wzorem $a_n = n^2 - 2n - 24$ dla $n \geq 1$?

9. Wyznacz trzeci i czwarty wyraz ciągu danego wzorem rekurencyjnym:

a) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n - 2n \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \cdot 4^n \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$

10. Niech S_n oznacza sumę *n* początkowych wyrazów ciągu a_n. Wiadomo, że $S_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. Oblicz a_1, a_3, a_7 oraz a_n.

11. Niech S_n oznacza sumę *n* początkowych wyrazów ciągu a_n. Wiadomo, że $S_n = \frac{n}{4n+1}$. Oblicz a_2, a_6 oraz a_n.

12. Zbadaj monotoniczność ciągów:

a) $a_n = -3n + 5$

b) $a_n = 2n^3 - n$

c) $a_n = n^2 + 4$

d) $a_n = \frac{n+4}{n+1}$

e) $a_n = \frac{n+1}{n+3}$

f) $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$

13. Wykaż, że następujące ciągi są arytmetyczne:

a) $a_n = 3n + 16$

b) $a_n = -\sqrt{2}n - 1$

c) $a_n = 16\frac{3}{5}$

14. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego danego wzorem: $a_n = -\frac{1}{2}n + 8$.

15. Zbadaj monotoniczność ciągu arytmetycznego danego wzorem: $a_n = -2n + \frac{1}{4}$

16. Wyznacz ciąg arytmetyczny a_n w którym $a_4 = 10$ oraz $a_6 = 14$.

17. Wyznacz różnicę oraz siódmy wyraz ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1 = 10$ oraz $a_2 = 13$

b) $a_1 = 7$ oraz $a_{29} = 133$

c) $a_2 = 3$ oraz $a_4 = 9$

d) $a_4 = 16$ oraz $a_8 = 4$

18. Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, w którym:

a) $a_1 = -3$ oraz $r = 5$

b) $a_5 = 12$ oraz $a_7 = -2$

19. Czy ciąg o kolejnych wyrazach $\frac{5}{6}$, $\sqrt{2} - \frac{1}{3}$, $2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$ jest arytmetyczny? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak to podaj jego różnicę.

20. Liczby: 1, 3, *x* −11, w podanej kolejności, są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz x.

21. Liczby $x - 2$, 3, $x + 6$ są w podanej kolejności pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.
22. Wyrazami ciągu arytmetycznego a_n są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3 = 12$. Oblicz a_{15}.
23. Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego oraz jego różnicę, jeżeli mamy dane $a_1 + a_5 = 26$ oraz $a_2 \cdot a_4 = 160$.
24. Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.
25. W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3 = 4$, $a_6 = 19$. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których wyrazy ciągu a_n są mniejsze od 200.
26. Wykaż, że jeżeli miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to co najmniej jeden jego kąt ma miarę 60^0.
27. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, wiedząc, że tworzą one ciąg arytmetyczny o różnicy 2.
28. Oblicz sumę 20 początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego a_n jeżeli $a_1 = 2$ oraz $a_7 = 20$.
29. Wyznacz różnicę ciągu arytmetycznego, mając dane:
    a) $S_n = 518, a_1 = 50 \; oraz \; n = 14$
    b) $S_n = 2241, a_n = 148 \; oraz \; n = 27$
30. Rozwiąż równanie $3 + 5 + 7 + ... + x = 195$ jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.
31. Rozwiąż równanie $(2x + 1) + (2x + 4) + (2x + 7) + ... + (2x + 28) = 155$ jeśli wiadomo, że składniki po lewej stronie są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.
32. Kasia przygotowując się do matury z matematyki rozwiązuje codziennie dodatkowe zadania. W pierwszym dniu rozwiązała 3 zadania, a w każdym kolejnym o 2 więcej niż w poprzednim. Po ilu dniach rozwiąże ona w sumie 120 zadań?
33. Rolnik zasiał pole. W pierwszym dniu zasiał 4 ha, a w każdym kolejnym o 3 ha więcej niż w poprzednim. Po ilu dniach zasianych będzie w sumie 209 ha?
34. Wykopanie pierwszego metra studni kosztuje 8 zł, a każdego następnego o 3 złote drożej.
    a) Ile kosztuje wykopanie studni o głębokości 25metrów?
    b) Wykopanie studni kosztowało 798 zł. Jaka była głębokość studni?
35. Wykaż, że następujące ciągi są geometryczne:
    a) $a_n = 5^{n+1}$
    b) $b_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-2}$
    c) $c_n = \frac{7}{2^{2n+1}}$
36. Zbadaj monotoniczność ciągu geometrycznego danego wzorem: $a_n = -\frac{1}{3} \cdot 4^n$.

37. Zbadaj monotoniczność ciągu geometrycznego danego wzorem: $a_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

38. Sprawdź czy ciąg $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ jest geometryczny.

39. Sprawdź czy ciąg $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, $2+\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}+2$ jest geometryczny.

40. Czy ciąg o kolejnych wyrazach $\sqrt{2}-1$, 1, $\sqrt{2}+1$ jest geometryczny? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak to podaj jego iloraz.

41. Wyznacz ciąg geometryczny a_n w którym $a_2 = -40$ oraz $a_5 = 1280$.

42. Wyznacz piąty wyraz ciągu geometrycznego, jeśli:

    a) $a_1 = 3 \; oraz \; q = 2$

    b) $a_3 = 4 \; oraz \; a_4 = 12$

    c) $a_3 = 40 \; oraz \; a_6 = 5$

    d) $a_2 = 27 \; oraz \; a_4 = 3$

43. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego, jeśli:

    a) $a_1 = 5 \; oraz \; q = 2$

    b) $a_1 = -4 \; oraz \; q = \frac{1}{2}$

    c) $a_3 = 6 \; oraz \; a_4 = 18$

44. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy *4*, a czwarty wyraz tego ciągu jest równy *−2*. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

45. Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy *4*, a piąty wyraz tego ciągu jest równy 1. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

46. Liczby −8 , 4 i *x*+1 (w podanej kolejności) są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz *x.*

47. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego oraz jego iloraz, jeżeli mamy dane $a_2 + a_4 = 10$ oraz $a_3 - a_2 = 2$.

48. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego oraz jego iloraz, jeżeli mamy dane $a_5 - a_3 = 1680$ oraz $a_3 + a_4 = 560$.

49. Piłka odbijając się od ziemi, osiągała za każdym razem wysokość wynoszącą $\frac{2}{3}$ poprzedniej. Jak wysoko wzniosła się piłka po pierwszym uderzeniu, jeśli po szóstym odbiła się na wysokość 32cm?

50. Wyznacz iloraz ciągu geometrycznego, mając dane:

    a) $S_n = 2186, a_1 = 2 \; oraz \; a_n = 1458$

    b) $S_n = -3069, a_n = -1536 \; oraz \; a_1 = -3$

51. Oblicz sumę 10 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego a_n jeżeli $a_1 = \sqrt{3}$ oraz $a_3 = 2\sqrt{3}$.

52. Przyznano kilka nagród, których wartość wynosiła 14 760 zł. Pierwsza nagroda wyniosła 5000zł, a każda następna była pewnym stałym ułamkiem poprzedniej nagrody. Oblicz ile było nagród i jaką wartość miała każda nagroda, jeśli ostatnia wynosiła 2560zł.

53. Za 3 książki, których ceny tworzą ciąg geometryczny zapłacono 76 zł. Najdroższa książka kosztowała o 4 zł mniej niż dwie pozostałe razem. Ile kosztowała każda książka?
54. Ciąg (4, *x*, *y*) jest ciągiem geometrycznym malejącym. Ciąg (*y*, *x* + 1, 5) jest ciągiem arytmetycznym. Wyznacz *x*.
55. Ciąg 9, *x*,19 jest arytmetyczny, a ciąg *x*, 42, *y*, *z* jest geometryczny. Oblicz *x*, *y* oraz *z*.
56. Liczby *a*, *b*, *c* tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 93. Te same liczby, w podanej kolejności są pierwszym, drugim i siódmym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz *a*, *b* i *c*.
57. Wyznacz wzór na *n* - ty wyraz ciągu arytmetycznego wiedząc, że suma pierwszych pięciu jego wyrazów jest równa 10, a wyrazy trzeci, piąty i trzynasty tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny.
58. Pan Nowak ulokował w banku kwotę 6000zł na 7% w skali roku (procent prosty). Jaką sumę otrzyma po pięciu latach?
59. Pan Kowalczyk złożył w banku 25 000zł na cztery lata na procent składany. Jaką kwotę będzie miał na koncie po tym okresie, jeśli oprocentowanie w banku wynosiło 10 % w skali roku, a odsetki kapitalizuje się:
    a) Co roku
    b) Co pół roku
    c) Co kwartał
    d) Co miesiąc
60. Pan Kłos złożył w banku 10 000zł na pięć lat na procent składany. Jaką kwotę będzie miał na koncie po tym okresie, jeśli oprocentowanie w banku wynosiło 6 % w skali roku, a odsetki kapitalizuje się:
    a) Co roku
    b) Co miesiąc
    c) Co kwartał
61. Pan Kowalski złożył w banku lokatę w wysokości 10 000zł na procent składany. Po dwóch latach bank wypłacił mu 12 155,06zł. Jakie było oprocentowanie tej lokaty w skali roku, jeśli bank kapitalizował odsetki co sześć miesięcy?
62. Ile pieniędzy należy przeznaczyć na lokatę (na procent składany) trwającą sześć miesięcy, aby po jej zakończeniu otrzymać 20 000zł. Roczna stopa procentowa jest równa 12%, kapitalizacja odsetek odbywa się co trzy miesiące.
63. Wiedząc, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{3}$ oblicz:
    a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + 3b_n)$
    b) $\lim_{n\to\infty}(4a_n - 6b_n)$
    c) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$
    d) $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}$

64. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = \frac{3n^2-4n-21}{n^2+1}$

b) $a_n = \frac{5n^3-10n-21}{2n^3+1}$

c) $a_n = \frac{-4n-1}{6n-2}$

d) $a_n = \frac{5^n-4^n}{5^n+4^n}$

e) $a_n = \frac{3\cdot 2^{2n}-5}{8\cdot 4^n+5}$

f) $a_n = \sqrt{\frac{5}{n+3}}$

g) $a_n = \sqrt{\frac{2n+6}{3n+1}}$

h) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

i) $a_n = \sqrt{2n+4} - \sqrt{2n}$

j) $a_n = \sqrt[n]{4^n + 5^n}$

k) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$

65. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{3n^2}$

b) $a_n = \frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{(2n-1)^2}$

c) $a_n = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}}$

66. Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeśli:

a) $a_n = 1 - 4n$

b) $a_n = 2n^2 - 3n + 7$

c) $a_n = \frac{3n^3-2n-25}{2n^2+1}$

d) $a_n = \frac{-3n-1}{2}$

e) $a_n = \frac{(n-2)(3-n)}{2n+7}$

67. Oblicz:

a) $16 + 8 + 4 + \cdots$

b) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots$

c) $\sqrt{12} + \sqrt{6} + \sqrt{3} + \cdots$

68. Znajdź iloraz nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego, którego pierwszym wyrazem jest 6, a sumą 18.

69. Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego zbieżnego wynosi $\frac{9}{2}$, a drugi wyraz ciągu jest równy 1. Wyznacz ten ciąg.

70. Rozwiąż równanie, bądź nierówność:

a) $2x + 4 + \frac{8}{x} + \cdots = -\frac{16}{3}$

b) $1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \cdots = 1 - 2x$

c) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \cdots > 2$

d) $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots > -1 - x$

71. W kwadrat o boku długości *a* wpisano koło, w które wpisano kwadrat, a w ten kwadrat znów koło itd. Oblicz sumę pól wszystkich kół.

72. W trójkąt równoboczny o boku długości *a* wpisano koło, w które wpisano trójkąt równoboczny, a w ten trójkąt znów koło itd. Oblicz sumę obwodów wszystkich kół.

73. Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{x+2}{x} + (\frac{x+2}{x})^2 + (\frac{x+2}{x})^3 + \cdots$, a następnie narysuj wykres funkcji f oraz rozwiąż nierówność $f(x) \leq 0$.